http://matetics-unknown.blogspot.com/2019/03/el-problema-de-la-suma-de-tres-cubo.html

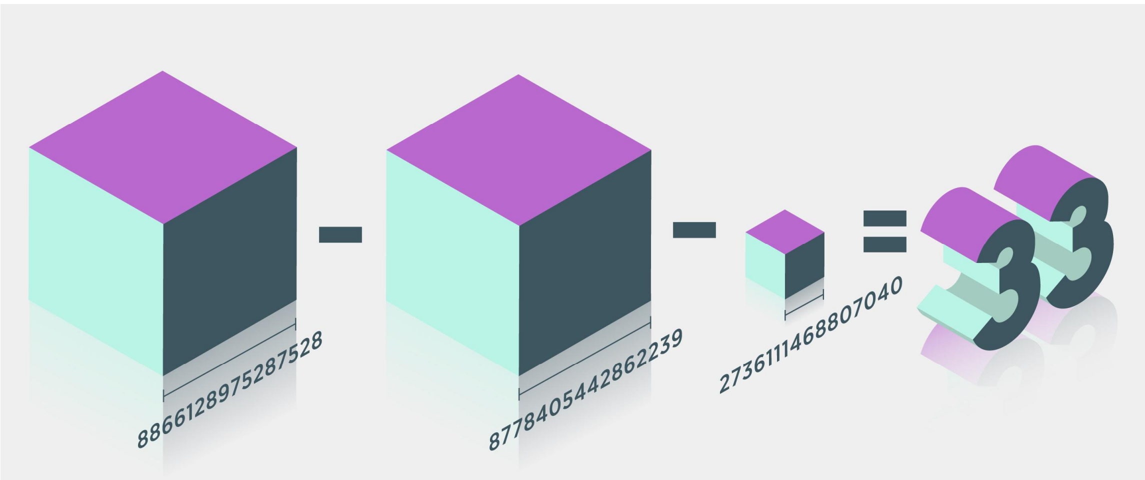
EL PROBLEMA DE LA SUMA DE TRES CUBOS IGUAL A 33

- marzo 31, 2019

La siguiente entrada ha sido tomada del sitio: Quanta Magazine de autoría de John Pavlus, del 29 de marzo de 2019

Resuelto el problema de la suma de tres cubos para el "terco" número 33

Un teórico del número con destreza en programación ha encontrado una solución a $33 = x^3 + y^3 + z^3$, una ecuación muy estudiada que no se resolvió durante 64 años.

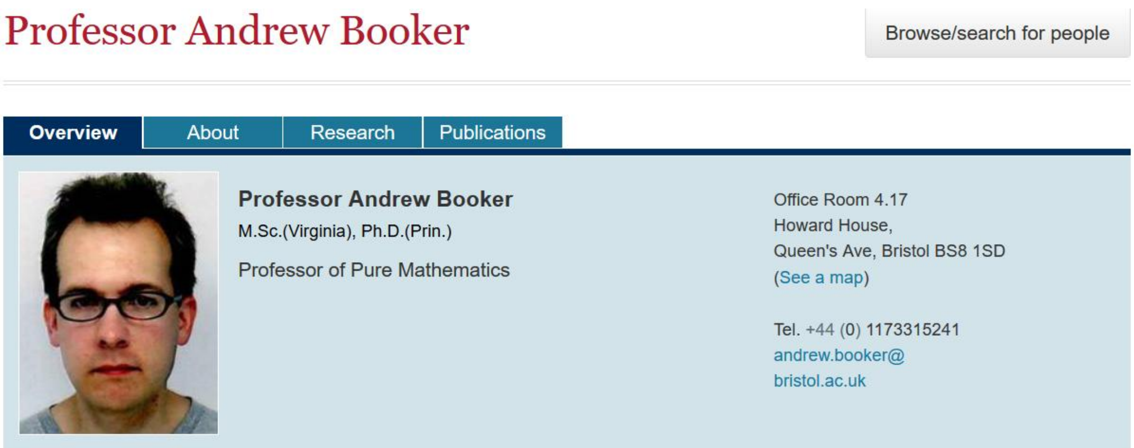


Los matemáticos se preguntaron durante mucho tiempo si es posible expresar el número 33 como la suma de tres cubos, es decir, si la ecuación $33 = x^3 + y^3 + z^3$ tiene una solución. Sabían que 29 podrían escribirse como $3^3 + 1^3 + 1^3$, por ejemplo, mientras que 32 no se puede expresar como la suma de tres enteros cada uno elevado a la tercera potencia. Pero el caso del 33 quedó sin resolver durante 64 años.

Ahora, Andrew Booker , un matemático de la Universidad de Bristol, finalmente lo ha descifrado: descubrió que

$$(8{,}866{,}128{,}975{,}287{,}528)^3 + (-8{,}778{,}405{,}442{,}862{,}239)^3 + (-2{,}736{,}111{,}468{,}807{,}040)^3 = 33$$

Booker encontró este extraño trío de enteros de 16 dígitos al diseñar un nuevo algoritmo de búsqueda para separarlos de los cuatrillones de posibilidades. El algoritmo se ejecutó en una supercomputadora universitaria durante tres semanas seguidas. (Dice que pensó que llevaría seis meses, pero una solución "surgió antes de lo que esperaba"). Cuando la noticia de su solución llegó a internet a principios de este mes, otros teóricos de los números y entusiastas de las matemáticas se mostraron muy entusiasmados. Según un video de Numberphile sobre el descubrimiento , el propio Booker literalmente saltó de alegría en su oficina cuando se enteró.



http://www.bristol.ac.uk/maths/people/andrew-r-booker/overview.html

¿Por qué tanta euforia? Parte de esto es la dificultad de encontrar una solución de este tipo. Desde 1955 , los matemáticos han usado las computadoras más poderosas que pueden usar para buscar en la recta numérica los tríos de enteros que satisfacen la ecuación de "suma de tres cubos" $k = x^3 + y^3 + z^3$, donde k es a número entero. A veces las soluciones son fáciles, como con $k = 29$; otras veces, se sabe que no existe una solución, como sucede con todos los números enteros que dejan un resto de 4 o 5 cuando se divide entre 9, como el número 32.

Pero por lo general, las soluciones son "no triviales". En estos casos, el trío de enteros en cubos, como $(114{,}844{,}365)^3 + (110{,}902{,}301)^3 + (-142{,}254{,}840)^3$, que equivale a 26, se parece más a un boleto de lotería que a cualquier cosa predecible estructura. Por ahora, la única forma en que los teóricos de los números descubren tales soluciones es jugar la "lotería" matemática una y otra vez, utilizando la fuerza bruta de la búsqueda asistida por computadora para probar diferentes combinaciones de enteros en cubos, y esperar una "victoria".

Pero incluso con computadoras cada vez más potentes y algoritmos más eficientes lanzados al problema, algunos números enteros se han negado obstinadamente a ceder boletos ganadores. Y el 33 fue un caso especialmente obstinado: hasta que Booker encontró su solución, fue uno de los dos enteros que quedaron por debajo de 100 (excluyendo aquellos para los que definitivamente no existen soluciones) que aún no se pueden expresar como una suma de tres cubos . Con 33 fuera del camino, el único que queda es 42.

La razón por la que tardó tanto tiempo en encontrar una solución para 33 es que buscar lo suficientemente arriba de la línea numérica (hasta 10^{16}, o diez billones, y hasta los enteros negativos) para el trío numérico correcto fue computacional Poco práctico hasta que Booker ideó su algoritmo. "No solo ha ejecutado esta cosa en una computadora más grande en comparación con las computadoras hace 10 años, ha encontrado una manera genuinamente más eficiente de ubicar las soluciones", dijo Tim Browning , teórico del Instituto de Ciencia y Tecnología de Austria.

Los algoritmos anteriores "no sabían lo que estaban buscando", explicó Booker; podrían buscar de manera eficiente un rango dado de enteros en busca de $k = x^3 + y^3 + z^3$ para cualquier número entero k, pero no pudieron apuntar a uno específico, como $k = 33$. El algoritmo de Booker podría, y por lo tanto, funciona "tal vez 20 veces más rápido, en términos prácticos", dijo, que los algoritmos que adoptan un enfoque no dirigido.

Con el boleto ganador de 33 ahora en la mano, Booker planea buscar el siguiente para una solución para 42. (Ya determinó que no existe ninguno en el rango de los diez billones de dólares; tendrá que buscar más en la recta numérica, al menos a 10^{17}.) Pero incluso cuando él u otro teórico numérico hayan identificado soluciones de suma de tres cubos para cada entero elegible hasta 100, enfrentarán 11 enteros más "obstinados" sin soluciones de suma de tres cubos entre 101 y 1.000, y una infinitud de ellos más allá de eso. Lo que es más, dicen Booker y otros expertos, cada nueva solución encontrada para uno de estos holdouts no arroja ninguna luz teórica sobre dónde o cómo encontrar el siguiente. "No creo que estos sean objetivos de investigación suficientemente interesantes por sí mismos para justificar grandes cantidades de dinero para acaparar arbitrariamente a una supercomputadora", dijo Booker.

Entonces, ¿por qué molestarse con 33 o 42 en absoluto?

Lo que es "suficientemente interesante", explicó Booker, es que cada nueva solución es "una herramienta para ayudarlo a decidir qué es verdad" sobre el problema de la suma de tres cubos. Ese problema, declarado como $k = x^3 + y^3 + z^3$, es lo que los teóricos de los números llaman ecuación diofántica, una especie de estructura algebraica cuyas propiedades han fascinado a los matemáticos durante milenios. "Son lo suficientemente ricos para codificar [otras afirmaciones matemáticas] que no tienen nada que ver con las ecuaciones diofánticas", dijo Browning. "Son lo suficientemente ricos como para simular computadoras".

Las ecuaciones diofánticas son ecuaciones polinomiales cuyas variables desconocidas deben tomar valores enteros. Sus propiedades básicas pueden obstaculizar a los teóricos del número. Por ejemplo, no existe ningún método matemático que pueda decir de manera confiable si alguna ecuación diofántica dada tiene soluciones. Según Booker, el problema de la suma de tres cubos "es uno de los más simples" de estas espinosas ecuaciones diofánticas. "Está justo en la frontera de lo que podemos manejar", agregó Browning.

Por esa razón, los teóricos de los números están ansiosos por entender todo lo que puedan sobre sumas de tres cubos. Un resultado importante sería probar la conjetura de que $k = x^3 + y^3 + z^3$ tiene infinitas soluciones para cada número entero k , excepto aquellos $k$que tienen un resto de 4 o 5 después de dividirse por 9. Las herramientas diseñadas para tal prueba podrían abrir la lógica del problema o aplicarse a otras ecuaciones diofánticas. Resultados como Booker's for 33 ofrecen apoyo para esta conjetura, dando a los teóricos de los números más confianza en que es una prueba que vale la pena seguir. De hecho, cada vez que los teóricos de los números han buscado más en la línea numérica con sus algoritmos de búsqueda, por ejemplo, extendiéndose a 10^{14} en 2009, a 10^{15} en 2016, y ahora a 10^{16} en 2019, nuevas soluciones para enteros previamente obstinados se han encontrado de manera confiable, eliminando posibles contraejemplos de la conjetura.

"Todas estas cosas son una especie de acumulación de datos", dijo Browning. Señaló que la nueva solución de Booker para 33 "no va a cambiar el curso de la investigación matemática en esta área. Pero es gratificante ver que las cosas están cayendo como deberían ".

CONCLUSIÓN: El resultado difundido por este artículo, reitera la importancia fundamental de las TICS en todos los ámbitos de la matemática, como son el investigativo, de la enseñanza, el aprendizaje, la difusión, etc.

!NOS VEMOS!

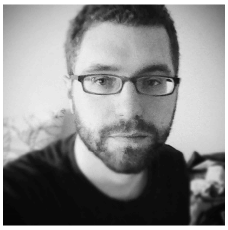
Abstractions blog

https://www.quantamagazine.org/sum-of-three-cubes-problem-solved-for-stubborn-number-33-20190326/

Sum-of-Three-Cubes Problem Solved for 'Stubborn' Number 33

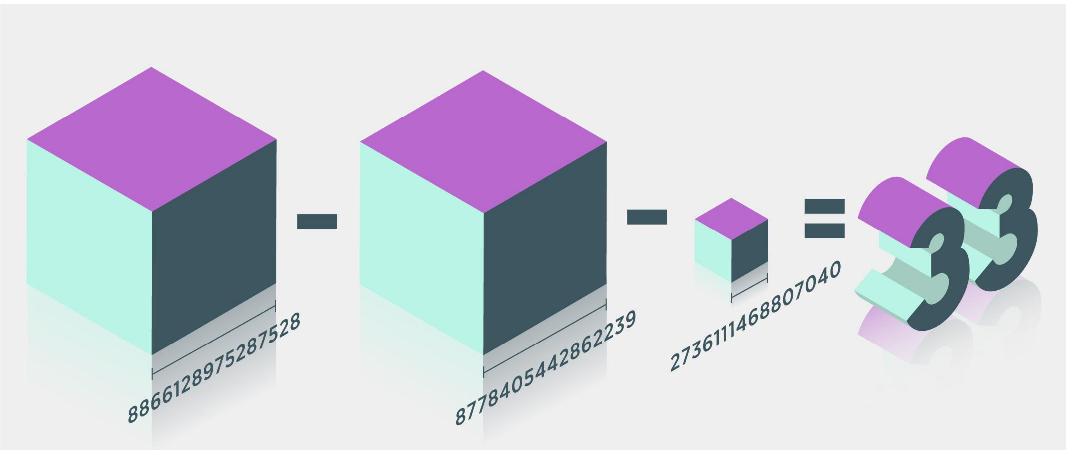
John Pavlus

Contributing Writer



March 26, 2019

A number theorist with programming prowess has found a solution to 33 = $x^3 + y^3 + z^3$, a much-studied equation that went unsolved for 64 years.



Mathematicians long wondered whether it's possible to express the number 33 as the sum of three cubes — that is, whether the equation $33 = x^3 + y^3 + z^3$ has a solution. They knew that 29 could be written as $3^3 + 1^3 + 1^3$, for instance, whereas 32 is not expressible as the sum of three integers each raised to the third power. But the case of 33 went unsolved for 64 years.

Now, Andrew Booker, a mathematician at the University of Bristol, has finally cracked it: He discovered that

$$(8{,}866{,}128{,}975{,}287{,}528)^3 + (-8{,}778{,}405{,}442{,}862{,}239)^3 + (-2{,}736{,}111{,}468{,}807{,}040)^3 = 33$$

Booker found this odd trio of 16-digit integers by devising a new search algorithm to sift them out of quadrillions of possibilities. The algorithm ran on a university supercomputer for three weeks straight. (He says he thought it would take six months, but a solution "popped out before I expected it.") When the news of his solution hit the internet earlier this month, fellow number theorists and math enthusiasts were feverish with excitement. According to a Numberphile video about the discovery, Booker himself literally jumped for joy in his office when he found out.

Why such elation? Part of it is the sheer difficulty of finding such a solution. Since 1955, mathematicians have used the most powerful computers they can get their hands on to search the number line for trios of integers that satisfy the "sum of three cubes" equation $k = x^3 + y^3 + z^3$, where k is a whole number. Sometimes solutions are easy, as with $k = 29$; other times, a solution is known not to exist, as with all whole numbers that leave behind a remainder of 4 or 5 when divided by 9, such as the number 32.

But usually, solutions are "nontrivial." In these cases, the trio of cubed integers — like $(114{,}844{,}365)^3 + (110{,}902{,}301)^3 + (-142{,}254{,}840)^3$, which equals 26 — looks more like a lottery ticket than anything with predictable structure. For now, the only way for number theorists to discover such solutions is to play the mathematical "lottery" over and over, using the brute force of computer-assisted search to try different combinations of cubed integers, and hope for a "win."

But even with increasingly powerful computers and more efficient algorithms thrown at the problem, some whole numbers have stubbornly refused to yield any winning tickets. And 33 was an especially stubborn case: Until Booker found his solution, it was one of only two integers left below 100 (excluding the ones for which solutions definitely don't exist) that still couldn't be expressed as a sum of three cubes. With 33 out of the way, the only one left is 42.

The reason it took so long to find a solution for 33 is that searching far enough up the number line — all the way to 10^{16}, or ten quadrillion, and just as far down into the negative integers — for the right numerical trio was computationally impractical until Booker devised his algorithm. "He has not just run this thing on a bigger computer compared to the computers 10 years ago — he has found a genuinely more efficient way of locating the solutions," said Tim Browning, a number theorist at the Institute of Science and Technology Austria.

Previous algorithms "didn't know what they were looking for," Booker explained; they could efficiently search a given range of integers for solutions to $k = x^3 + y^3 + z^3$ for any whole number k, but they weren't able to target a specific one, like $k = 33$. Booker's algorithm could, and thus it works "maybe 20 times faster, in practical terms," he said, than algorithms that take an untargeted approach.

With 33's winning ticket now in hand, Booker plans to look next for a solution for 42. (He already determined that none exist in the ten-quadrillion range; he'll have to look further out on the number line, to at least 10^{17}.) But even when he or another number theorist has identified sum-of-three-cubes solutions for every eligible integer up to 100, they'll then face 11 more "stubborn" integers without sum-of-three-cubes solutions between 101 and 1,000, and an infinitude of them beyond that. What's more, Booker and other experts say, each new solution found for one of these holdouts sheds no theoretical light on where, or how, to find the next one. "I don't think these are sufficiently interesting research goals in their own right to justify large amounts of money to arbitrarily hog a supercomputer," Booker said.

So why bother with 33 or 42 at all?

What is "sufficiently interesting," Booker explained, is that each newfound solution is "a tool for helping you decide what's true" about the sum-of-three-cubes problem itself. That problem, stated as $k = x^3 + y^3 + z^3$, is what number theorists call a Diophantine equation — a kind of algebraic structure whose properties have fascinated mathematicians for millennia. "They're rich enough to encode [other mathematical] statements that have nothing to do with Diophantine equations," said Browning. "They're rich enough to simulate computers."

Diophantine equations are polynomial equations whose unknown variables must take integer values. Their basic properties can stymie number theorists. For instance, no mathematical method exists that can reliably tell whether any given Diophantine equation has solutions. According to Booker, the sum-of-three-cubes problem "is one of the simplest" of these thorny Diophantine equations. "It's right at the frontier of what we can handle," Browning added.

For that reason, number theorists are eager to understand anything they can about sums of three cubes. A major result would be to prove the conjecture that $k = x^3 + y^3 + z^3$ has infinitely many solutions for every whole number k, except those k that have a remainder of 4 or 5 after being divided by 9. The tools devised for such a proof might pry open the logic of the problem, or apply to other Diophantine equations. Results like Booker's for 33 offer support for this conjecture, giving number theorists more confidence that it's a proof worth pursuing. Indeed, every time number theorists have looked further up the number line with their search algorithms — for example, by extending out to 10^{14} in 2009, to 10^{15} in 2016, and now to 10^{16} in 2019 — new solutions for previously stubborn integers have reliably been found, knocking out possible counterexamples to the conjecture.

"All of these things are kind of an accumulation of data," Browning said. He noted that Booker's new solution for 33 "is not going to change the course of mathematical research in this area. But it's gratifying to see that things are falling as they should."